

シュタイナー系の large set と Erdős–Rosenfeld の彩色問題： $k = 10$ および $k = 12$ の場合

ピカイぬ*

2026年9月13日

概要

Erdős と Rosenfeld は、 $k > 2$ であって $\{1, \dots, 2k\}$ の k -部分集合を $k+1$ 色で彩色し、どの $(k+1)$ -部分集合についてもその k -部分集合に $k+1$ 色すべてが現れるようにできるか、すなわち $\chi(J(2k, k)) = k+1$ となる $k > 2$ が存在するかを問うた (Erdős 問題 835)。答えは $3 \leq k \leq 8$ で否定的であることが知られ、また Ma と Tang により $k+1$ が素数でないすべての k で否定的であることが知られていた。未解決の最小ケースは $k = 10$ であった。

本稿では、この彩色が存在することと、 $[2k]$ の k -部分集合全体が $k+1$ 個の互いに素なシュタイナー系 $S(k-1, k, 2k)$ に分割されること (large set $LS[k+1](k-1, k, 2k)$ の存在) とが同値であることを観察する。ここから三つの帰結が得られる。

第一に、導来設計の構成を繰り返すと、 $S(k-1, k, 2k)$ の存在はシュタイナー五重系 $S(4, 5, k+5)$ の存在を強制する。 $S(4, 5, 15)$ と $S(4, 5, 17)$ は存在しないので、Erdős–Rosenfeld の問いは $k = 10$ および $k = 12$ で否定的に解決する。未解決の最小ケースは $k = 16$ に移り、これは存在が未解決な最小のシュタイナー五重系 $S(4, 5, 21)$ を必要とする。

第二に、 $S(k-1, k, 2k)$ に必要な整除条件が成り立つのは $k+1$ が素数のとき、かつそのときに限る。これは Ma–Tang の定理の短い初等的な別証明を与える。

第三に、タイトな系 $S(k-1, k, 2k)$ の構造論を展開する。そのような系はどれも自動的にどの $(k+1)$ -集合ともちょうど一つのブロックで交わる。したがってこれらは $J(2k, k)$ の比境界を達成する独立集合そのものである。 k が偶数ならどれも自己補的であり、互いに素な二つの系の交差分布は完全に決定され、しかもどのブロックから見ても同一である。その局所交差数が整数になるのは $k+1$ が素数のとき、かつそのときに限るので、Ma–Tang の条件がここで二度目に現れる。全数計算により、タイトな系の非交差グラフは $k = 4$ と $k = 6$ で三角形をもたない。すなわち互いに素な系は高々二つであり、large set は $k+1$ 個を要する。これがすべての $k \geq 4$ で成り立つと予想する。正しければ Erdős–Rosenfeld の問いは完全に解決し、しかも導来設計による議論と違って、単一のタイトな系が存在するか否かを知る必要がない。

1 序

$0 \leq k \leq n$ に対し、ジョンソングラフ $J(n, k)$ とは、 $[n] = \{1, \dots, n\}$ の k -部分集合を頂点とし、ちょうど $k-1$ 点を共有する二つを隣接とするグラフである。次の Erdős と Rosenfeld の問いは、Erdős 問題データベース [1] の問題 835 である。

問題 1. $k > 2$ であって、 $\{1, \dots, 2k\}$ の k -部分集合を $k+1$ 色で彩色し、 $|A| = k+1$ なるすべての $A \subseteq \{1, \dots, 2k\}$ について A の k -部分集合に $k+1$ 色すべてが現れるようにできるものは存在するか。

*連絡先: mrtt0817@gmail.com。本稿の数学的展開および計算は Claude (Anthropic) との共同作業による。謝辞を参照。

そのような A の k -部分集合は $J(2k, k)$ において互いに隣接し、ちょうど $k+1$ 個ある。よって問題 1 は $\chi(J(2k, k)) = k+1$ となるかを問うているに等しい ($J(2k, k)$ のクリーク数は $k+1$ 、補題 5)。答えは $k=2$ で肯定的であり、[1] に記録されているとおり $3 \leq k \leq 8$ では否定的である。さらに Ma と Tang は、 $k > 2$ かつ $k+1$ が素数でないとき $\chi(J(2k, k)) > k+1$ を証明した。したがって未解決の最小ケースは $k=10$ であった。

シュタイナー系 $S(t, \kappa, v)$ とは、 v -集合の κ -部分集合 (ブロック) の族で、どの t -部分集合もちょうど一つのブロックに含まれるものをいう。また large set $LS[N](t, \kappa, v)$ とは、 $\binom{v}{\kappa}$ 個の κ -部分集合全体を、互いに素な N 個の $S(t, \kappa, v)$ に分割したものをいう。

定理 2 (言い換え). $k \geq 2$ とする。次は同値である。

- (i) 問題 1 の彩色が存在する。
- (ii) $\chi(J(2k, k)) = k+1$ 。
- (iii) large set $LS[k+1](k-1, k, 2k)$ が存在する。

定理 2 は初等的であり、その背後にある技法は確実に既知のものである。含意 (iii) $\Rightarrow$ (ii) はジョンソングラフを最適に彩色する標準的な手法であり、Brouwer [6] は $J(n, 3)$ についてまさに同型の主張を記録し、シュタイナー三重系の large set の存在から $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ 、 $n > 7$ に対して $\chi(J(n, 3)) = n-2$ を導いている。本稿が用いるのは逆向きの含意 (ii) $\Rightarrow$ (iii) であり、これは $n = 2k$ に特有の一致 $\binom{2k}{k+1} = \binom{2k}{k-1}$ に依拠する。この同値性は [1] には現れておらず、設計理論の道具立てを使えるようにする点で、問題の様相を一変させる。主な応用は次である。

定理 3. $\chi(J(20, 10)) > 11$ かつ $\chi(J(24, 12)) > 13$ 。すなわち問題 1 は $k=10$ および $k=12$ で否定的に解決する。

証明は第 5 節にあり、定理 2 を認めれば三行である。 k に対する彩色はシュタイナー系 $S(k-1, k, 2k)$ を生み、その $(k-5)$ 回の導来設計はシュタイナー五重系 $S(4, 5, k+5)$ である。そして $S(4, 5, 15)$ と $S(4, 5, 17)$ は存在しないことが知られている [4]。

系 4. 問題 1 の未解決の最小ケースは $k=16$ である。そこで肯定的な答えが得られれば、とりわけシュタイナー五重系 $S(4, 5, 21)$ —存在が未解決な最小のシュタイナー五重系— が構成されることになる [4, 5]。

表 1 に、これまで知られていたことと本稿で加わることをまとめる。

	これまで知られていたこと	本稿
$k=2$	できる (古典的)	—
$3 \leq k \leq 8$	できない (計算機探索)	ゼロから再現、構造的に説明
$k+1$ が素数でない	できない (Ma-Tang)	整除条件からの初等的な別証明
$k=10$	未解決	できない (定理 3)
$k=12$	未解決	できない (定理 3)
$k=16, 18, 22, \dots$	未解決	未解決、予想 18 に帰着
未解決の最小ケース	$k=10$	$k=16$
系の構造	—	補題 12–14、定理 15

表 1: ビフォー・アフター。

以下の構成は次のとおり。第 2 節で定理 2 を証明する。第 3 節で主張の形を明示し、最初の三つの場合 $k=2, 3, 4$ を完全に書き下す。第 4 節で Ma-Tang の定理の初等的な別証明を導く。第 5 節で定理 3 を証明し、問題の現状を表にまとめる。第 6 節でタイトな系の構造論を展開し、予想 18 を述べる。第 7 節で既知範囲 $3 \leq k \leq 8$ をこの枠組みで説明

し、検証計算を報告する。第 8 節には、定理 3 が得られる前に行った $S(9, 10, 20)$ に対する Kramer-Mesner 探索を記録する。論理的にはすでに不要だが、定理を裏付けるものである。第 9 節で線形障害を、第 10 節で未解決問題を述べる。すべての計算は再現可能である (第 10 節)。

2 言い換え

台集合は $[2k]$ とし、 $\binom{X}{j}$ で X の j -部分集合の族を表す。

補題 5. $k \geq 2$ とする。 $J(2k, k)$ のどの辺も、 $|A| = k + 1$ なる A に対するクリーク $\binom{A}{k}$ に含まれる。また各 $\binom{A}{k}$ は $k + 1$ 個の元からなるクリークである。さらに $\omega(J(2k, k)) = k + 1$ 。

証明. $|S \cap T| = k - 1$ ならば $|S \cup T| = k + 1$ で $S, T \in \binom{S \cup T}{k}$ 。逆に $(k + 1)$ -集合の相異なる二つの k -部分集合は $k - 1$ 点を共有する。クリーク数について、 $|C| \geq 3$ なるクリーク C と $S \in C$ を取る。各 $T \in C \setminus \{S\}$ は $s_T \in S$ 、 $x_T \notin S$ を用いて $(S \setminus \{s_T\}) \cup \{x_T\}$ と書ける。もしある T_1, T_2 が $s_{T_1} \neq s_{T_2}$ を満たすなら、 $|T_1 \cap T_2| = k - 1$ より $x_{T_1} = x_{T_2} =: x$ が従い、 C の各元は $\binom{S \cup \{x\}}{k}$ (大きさ $k + 1$) に属する。そうでなければ $C \setminus \{S\}$ の全元が共通の $s_T = s$ をもち、 $C \subseteq \{(S \setminus \{s\}) \cup \{x\} : x \notin S \setminus \{s\}\}$ 、その大きさは $2k - (k - 1) = k + 1$ 。□

証明に現れた二つの族が $J(2k, k)$ の極大クリークの二種類である。すなわち $|A| = k + 1$ に対する上位クリーク $\binom{A}{k}$ と、 $|B| = k - 1$ に対する星クリーク $\{B \cup \{x\} : x \notin B\}$ である。後者が $k + 1$ 個になるのは $2k - (k - 1) = k + 1$ による。 $n = 2k$ に特有のこの一致が、以下のすべてを動かしている。

定理 2 の証明. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). 補題 5 よりどの辺も上位クリークに含まれるので、(i) の彩色は固有彩色である。逆に $k + 1$ 色の固有彩色は $(k + 1)$ -クリーク $\binom{A}{k}$ 上で全色を使い切る。

(ii) $\Rightarrow$ (iii). c を色クラス $C_0, \dots, C_k$ をもつ固有 $(k + 1)$ -彩色とする。 i を固定し、 $|A| = k + 1$ 、 $S \in \binom{A}{k}$ 、 $c(S) = i$ なる組 (A, S) を二通りに数える。各 A はちょうど一つ寄与し、各 S はちょうど $2k - k = k$ 個の A に含まれる。よって

$$|C_i| = \frac{1}{k} \binom{2k}{k+1}. \quad (1)$$

一方 C_i は独立集合だから、その元どうしは $(k - 1)$ -部分集合を共有しない。各元は k 個の $(k - 1)$ -部分集合を含むので

$$k |C_i| \leq \binom{2k}{k-1}. \quad (2)$$

ところが $\binom{2k}{k+1} = \binom{2k}{k-1}$ なので、(1) は (2) を等号で達成する。等号は「 $[2k]$ のどの $(k - 1)$ -部分集合もちょうど一つの C_i の元に含まれる」ことに他ならない。よって各 C_i はシュタイナー系 $S(k - 1, k, 2k)$ であり、全体で large set をなす。

(iii) $\Rightarrow$ (ii). $S(k - 1, k, 2k)$ の二つのブロックが $k - 1$ 点を共有すれば、その $(k - 1)$ -部分集合が二つのブロックに含まれてしまう。よって large set の各元は $J(2k, k)$ の独立集合であり、所属で彩色すれば固有彩色になる。□

注意 6. 同じことだが $|C_i| = \binom{2k}{k}/(k + 1)$ である。すなわち $J(2k, k)$ の $(k + 1)$ -彩色は、存在するならば自動的に均等彩色になる。

3 何が主張されているのか、そして最初の三つの場合

問題 1 の論理的な形をはっきりさせておく価値がある。これはすべての k についての主張ではなく、 k についての存在の問いだからである。すなわち「ある $k > 2$ で塗り分けができるか」を問うている。予想される——そして現在ほぼ確かめられつつある——答えは「どの k でもできない」、つまり $k = 2$ だけが唯一うまくいく場合で、 $k > 2$ はすべて失敗する、というものである。この問題が難しいのは、失敗の理由が本質的に三種類あり、一つの議論ですべてを覆えないことによる。

(A) 算術的な理由でシュタイナー系が存在しない

$k+1$ が素数でなく、整除条件 (3) が破れ、 $S(k-1, k, 2k)$ が存在しない。これが系 8 であり、 $k = 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, \dots$ を覆う。

(B) 設計理論的な理由でシュタイナー系が存在しない

$k+1$ は素数で算術的には問題ないが、導来設計の連鎖が「存在しないことが知られているシュタイナー五重系」に到達する。これが定理 3 であり、 $k = 10$ と $k = 12$ を覆う。

(C) 系は存在するが large set が存在しない

$S(k-1, k, 2k)$ は一つ存在するのに、互いに素な $k+1$ 個を揃えられない。 $k = 4$ と $k = 6$ で実際に起きているのがこれであり、予想 18 は、残るすべての場合でこれが起きると主張する。

なぜこの問いが単に「厳しい」のではなく「微妙」なのかを一言述べておく。 $(k+1)$ -集合の k -部分集合を選ぶことは、その $k+1$ 個の元のうちちょうど1個を捨てることに等しい。よって $(k+1)$ -集合の k -部分集合はちょうど $k+1$ 個あり、色もちょうど $k+1$ 色である。つまり「全色が現れる」は緩い被覆条件ではなく、その $k+1$ 個が互いに異なる色であるという主張に他ならない。個数がまったく余裕なく噛み合っている。(補題 5 は、この観察を $J(2k, k)$ のクリーク構造として述べたものである。)

最初の三つの場合が、ちょうどこの三つの振る舞いを示している。以下に明示する。

$k = 2$: うまくいく。台集合は $\{1, 2, 3, 4\}$ 、2個組は $\binom{4}{2} = 6$ 通り、色は 3 色、各色クラスの大きさは $6/3 = 2$ 。クラスは $S(1, 2, 4)$ 、すなわち $\{1, 2, 3, 4\}$ の完全マッチングでなければならない。それはちょうど三つあり、互いに素である：

$$\{12, 34\}, \quad \{13, 24\}, \quad \{14, 23\}.$$

三つ合わせて6通りの2個組をすべて使い切る。これが large set であり、求める彩色である。

$k = 3$: **そもそも系が存在しない**。台集合は $\{1, \dots, 6\}$ 、3個組は $\binom{6}{3} = 20$ 通り、色は 4 色なので各クラスは $20/4 = 5$ 個の元をもち、シュタイナー三重系 $S(2, 3, 6)$ 、すなわち「6点のどのペアもちょうど一つの三つ組に入る」ものでなければならない。一点を固定する。その点は他の5点それぞれとペアを作り、その点を通る三つ組はそのうち2つのペアを消費するので、その点は $5/2$ 個の三つ組に入ることになる。整数でない。よって $S(2, 3, 6)$ は存在せず、large set を考えるまでもなく終わる。(これが機構 (A) の最小の実例である。)

$k = 4$: **系は存在するが large set が存在しない**。台集合は $\{1, \dots, 8\}$ 、4個組は $\binom{8}{4} = 70$ 通り、色は 5 色なので各クラスは $70/5 = 14$ 個の元をもち、シュタイナー四重系 $SQS(8)$ で

なければならない。これは存在する——ラベル付き8点集合上にちょうど 30 個あり、すべて同型である——しかも互いに素な二つを取ることもできる：

D_1 : 1234 1256 3456 1357 2457 2367 1467 2358 1458 1368 2468 1278 3478 5678

D_2 : 1235 1346 2456 2347 1457 1267 3567 1248 3458 2368 1568 1378 2578 4678

D_1 と D_2 はブロックを一つも共有しないので、二つ合わせて 70 通りのうち 28 通りを占める。しかし 30 個すべてを網羅的に調べると、 D_1 と D_2 の両方と素な SQS(8) は存在しない。互いに素な系の最大個数は 2 であり、必要なのは 5 個である。これが機構 (C) であり、我々が普遍的だと予想する振る舞いである。

4 整除条件と Ma-Tang の定理の別証明

$S(t, \kappa, v)$ が存在するためには

$$\binom{\kappa-i}{t-i} \mid \binom{v-i}{t-i} \quad (0 \leq i \leq t) \quad (3)$$

が必要である。固定した i -集合を通るブロックが $S(t-i, \kappa-i, v-i)$ をなすからである。(3) を満たすパラメータを許容的という。

定理 7. $k \geq 2$ 、 $m = k+1$ とする。パラメータ $(k-1, k, 2k)$ が許容的であるのは、 m が素数のとき、かつそのときに限る。

証明. $t = k-1$ 、 $\kappa = k$ 、 $v = 2k$ のとき $\binom{\kappa-i}{t-i} = k-i$ なので、(3) は $0 \leq i \leq k-1$ に対する $(k-i) \mid \binom{2k-i}{k-1-i}$ となる。 $j = k-i \in \{1, \dots, k\}$ と置けばこれは $1 \leq j \leq m-1$ に対する $j \mid \binom{m+j-1}{m}$ となり、

$$\frac{1}{j} \binom{m+j-1}{m} = \frac{(m+j-1)!}{m! j!} = \frac{1}{m+j} \binom{m+j}{j}$$

であるから、条件は

$$N \mid \binom{N}{m} \quad (\text{すべての } m < N < 2m) \quad (4)$$

と同値である。

m が素数のとき。 $\frac{m}{N} \binom{N}{m} = \binom{N-1}{m-1} \in \mathbb{Z}$ より $N \mid m \binom{N}{m}$ 、よって $\frac{N}{\gcd(N, m)} \mid \binom{N}{m}$ 。 m は素数で $m < N < 2m$ だから $\gcd(N, m) = 1$ 、ゆえに (4) が成り立つ。

m が合成数のとき。最小素因数を p とし $m = ps$ ($s \geq p \geq 2$) と書く。 $N = m + p = p(s+1)$ と置く ($p \leq m/2 < m$ なので適格)。 $N - m = p$ だから

$$\binom{N}{m} = \binom{N}{p} = \frac{\prod_{i=0}^{p-1} (N-i)}{p!}$$

であり、 $1 \leq i \leq p-1$ では $N-i \equiv -i \not\equiv 0 \pmod{p}$ なので、 p 進的に寄与するのは因子 N のみである。 p 進付値を v_p と書くと $v_p(\prod_{i=0}^{p-1} (N-i)) = 1 + v_p(s+1)$ 、 $v_p(p!) = 1$ より $v_p(\binom{N}{m}) = v_p(s+1) = v_p(N) - 1 < v_p(N)$ 、すなわち $N \nmid \binom{N}{m}$ 。□

系 8 (Ma-Tang, [1] の記述による). $k > 2$ かつ $k+1$ が素数でなければ $\chi(J(2k, k)) > k+1$ 。

証明. 定理 7 より $S(k-1, k, 2k)$ は存在せず、したがって large set も存在しない。定理 2 を適用すればよい。□

定理 7 は $k \leq 400$ の全域で数値的に確認した。合成数の各ケースにおいて、最初に破れる N は証明中のとおり常に $m+p$ であった。

5 導来設計： $k = 10$ と $k = 12$

補題 9 (導来設計). D を点集合 X 上の $S(t, \kappa, v)$ ($t \geq 1$) とし、 $x \in X$ とする。このとき $D_x = \{B \setminus \{x\} : x \in B \in D\}$ は $X \setminus \{x\}$ 上の $S(t-1, \kappa-1, v-1)$ である。したがって $S(t, \kappa, v)$ が存在すれば、 $0 \leq i \leq t-1$ なるすべての i に対し $S(t-i, \kappa-i, v-i)$ が存在する。

証明. $T \subseteq X \setminus \{x\}$ 、 $|T| = t-1$ とする。 $T \cup \{x\}$ は t -集合なので、ちょうど一つのブロック $B \in D$ に含まれる。 B は x を含むので $B \setminus \{x\} \in D_x$ は T を含む。もし $B' \setminus \{x\} \in D_x$ も T を含めば、 B' は $T \cup \{x\}$ を含むブロックだから $B' = B$ 。あとは繰り返せばよい。□

パラメータ k における問題 1 に対応する系は $S(k-1, k, 2k)$ であり、補題 9 よりその i 回の導来設計は $S(k-1-i, k-i, 2k-i)$ である。 $i = k-5$ とすれば $t = 4$ の項が得られる：

$$S(k-1, k, 2k) \text{ が存在} \implies S(4, 5, k+5) \text{ が存在.} \quad (5)$$

$S(4, 5, v)$ は シュタイナー五重系 と呼ばれる。その存在問題は古典的かつ繊細である。

$S(4, 5, 11)$ は一意に存在し、 $S(4, 5, 15)$ と $S(4, 5, 17)$ は存在しない。 $v \in \{23, 35, 47, 71, 83, 107, 131, 167, 243\}$ については存在が知られており、存在が未解決な最小の v は 21 である [4, 5]。

定理 3 の証明. $k = 10$ で問題 1 が肯定的だと仮定する。定理 2 より large set LS[11](9, 10, 20) が存在し、とくに $S(9, 10, 20)$ が存在する。補題 9 を 5 回適用すると

$$S(9, 10, 20) \rightarrow S(8, 9, 19) \rightarrow S(7, 8, 18) \rightarrow S(6, 7, 17) \rightarrow S(5, 6, 16) \rightarrow S(4, 5, 15)$$

となり、 $S(4, 5, 15)$ の非存在に矛盾する。 $k = 12$ では 7 回適用して

$$S(11, 12, 24) \rightarrow S(10, 11, 23) \rightarrow S(9, 10, 22) \rightarrow S(8, 9, 21) \rightarrow S(7, 8, 20) \rightarrow S(6, 7, 19) \rightarrow S(5, 6, 18) \rightarrow S(4, 5, 17)$$

となり、 $S(4, 5, 17)$ の非存在に矛盾する。□

注意 10. $k = 10$ については一段手前で止めてもよい。 $S(5, 6, 16)$ も存在しないことが知られているからである。ただし $S(5, 6, 16)$ 自体が $S(4, 5, 15)$ を導くので、本質的な障害は五重系のほうにある。

注意 11 (二つの非存在結果の出典について). $S(4, 5, 17)$ の非存在は [4] の主定理である。 $S(4, 5, 15)$ の非存在はより古く、通常これと併せて引用される ([4] およびそこでの引用文献、また [10, Part II] を参照)。本稿を自己完結させたい読者は、この帰属を一次文献まで遡って確認されたい。これに依存するのは $k = 10$ のみであり、 $k = 12$ は [4] のみに依拠する。

連鎖のうち $t \geq 5$ の項はいずれもさらに導来して $t = 4$ の項に至り、 $t \leq 3$ の項は シュタイナー四重系・三重系であって、その存在は許容性がすでに含意する合同条件で決まる。したがって (5) がこの手法から取り出せる情報のすべてである。表 2 に問題の現状をまとめる。

6 タイトなシュタイナー系の構造

$S(k-1, k, 2k)$ をタイトなパラメータと呼ぶ。境界 $v \geq (t+1)(\kappa-t+1)$ を等号で達成するからである。本節ではそのような系の構造的事実を集める。これらは、単一の系に比べて large set がなぜ格段に難しいかを説明し、予想 18 に至る。予想が正しければ問題 1 は完全に解決する。

以下 $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ をカタラン数とする。 $\frac{1}{k} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{k} \binom{2k}{k+1} = C_k$ なので、タイトな系のブロック数はちょうど C_k であり、 $\binom{2k}{k} = (k+1)C_k$ である。

k	必要な系	$t = 4$ の項	その項	問題 1
2	$S(1, 2, 4)$	—	—	肯定的
4	$S(3, 4, 8)$	—	—	否定的 (large set が非存在)
6	$S(5, 6, 12)$	$S(4, 5, 11)$	存在する	否定的 (large set が非存在)
10	$S(9, 10, 20)$	$S(4, 5, 15)$	存在しない	否定的
12	$S(11, 12, 24)$	$S(4, 5, 17)$	存在しない	否定的
16	$S(15, 16, 32)$	$S(4, 5, 21)$	未解決	未解決
18	$S(17, 18, 36)$	$S(4, 5, 23)$	存在する	未解決
22	$S(21, 22, 44)$	$S(4, 5, 27)$	未解決	未解決
28	$S(27, 28, 56)$	$S(4, 5, 33)$	未解決	未解決
30	$S(29, 30, 60)$	$S(4, 5, 35)$	存在する	未解決
36	$S(35, 36, 72)$	$S(4, 5, 41)$	未解決	未解決
40	$S(39, 40, 80)$	$S(4, 5, 45)$	未解決	未解決
42	$S(41, 42, 84)$	$S(4, 5, 47)$	存在する	未解決

表 2: $k + 1$ が素数である k に対する問題 1 の現状。それ以外の $k > 2$ は系 8 により否定的。太字が新しい部分。

補題 12. D を $S(k-1, k, 2k)$ とする。このとき $[2k]$ のどの $(k+1)$ -部分集合も、 D のブロックをちょうど一つ含む。

証明. $|A| = k+1$ に対し $a(A) = \#\{S \in D : S \subseteq A\}$ と置く。接続数を数えると $\sum_A a(A) = |D| \cdot k = \binom{2k}{k-1} = \binom{2k}{k+1}$ であり、これは A の総数に等しい。順序対を数えると $\sum_A a(A)^2 = \sum_{S, S' \in D} \#\{A : S \cup S' \subseteq A\}$ 。対角部分の寄与は $|D| \cdot k$ 。 $S \neq S'$ が D の元なら、二つのブロックは $(k-1)$ -集合を共有できないので $|S \cap S'| \leq k-2$ 、したがって $|S \cup S'| \geq k+2$ となり、両方を含む A は存在しない。よって $\sum_A a(A)^2 = \sum_A a(A)$ 、すなわち $\sum_A a(A)(a(A)-1) = 0$ 。 $a(A)$ は非負整数なのですべて $a(A) \leq 1$ であり、総和が A の個数に等しいことから $a(A) = 1$ が全域で成り立つ。 $\square$

系 13. D が $S(k-1, k, 2k)$ なら $D^c := \{[2k] \setminus S : S \in D\}$ もそうである。さらにタイトな系が存在するとき $\alpha(J(2k, k)) = C_k$ であり、その大きさの独立集合はちょうどタイトな系に他ならない。

証明. $(k-1)$ -集合 B について $B \subseteq [2k] \setminus S$ は $S \subseteq [2k] \setminus B$ (これは $(k+1)$ -集合) と同値。補題 12 を適用する。後半は、独立集合 I の影が互いに相異なるので $k|I| \leq \binom{2k}{k-1}$ 、すなわち $|I| \leq C_k$ であり、等号はどの $(k-1)$ -集合もちょうど一度被覆されることと同値。 $\square$

したがってタイトな系は、 $J(2k, k)$ の比 (Hoffman) 境界を達成する独立集合そのものである。この graph の次数は k^2 、最小固有値は $-k$ なので $\alpha \leq \binom{2k}{k} \cdot k / (k^2 + k) = C_k$ 。その帰結として、全 1 ベクトルを $\mathbf{1}$ 、ジョンソン・スキームの固有空間を $V_0, \dots, V_k$ と書けば

$$\chi_D - \frac{1}{k+1} \mathbf{1} \in \ker \partial^\downarrow \cap \ker \partial^\uparrow = V_k \quad (6)$$

が成り立つ。ここで $\partial^\downarrow, \partial^\uparrow$ は第 9 節の 下降・上昇作用素である。実際 $\ker \partial^\downarrow = V_k$ は古典的であり、補集合作用素を Γ として $\ker \partial^\uparrow = \Gamma(\ker \partial^\downarrow) = V_k$ 。とくに $\dim(\ker \partial^\downarrow \cap \ker \partial^\uparrow) = \dim V_k = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} = C_k$ であり、これは第 9 節で $k = 2, 4, 6$ について $\mathbb{F}_{k+1}$ 上で確認した値を $\mathbb{R}$ 上で証明したことになる。

補題 14. Γ は V_j 上でスカラー $(-1)^j$ として作用する。したがって k が偶数のとき どの $S(k-1, k, 2k)$ も $D^c = D$ を満たし、 $k \geq 3$ が奇数のとき $S(k-1, k, 2k)$ は存在しない。

証明. Γ が V_j 上でスカラーとして作用することは標準的である ($2k \leq 8$ で数値的にも確認した)。 (6) と $\chi_{D^c} = \Gamma\chi_D$ より $\chi_{D^c} - \frac{1}{k+1}\mathbf{1} = (-1)^k(\chi_D - \frac{1}{k+1}\mathbf{1})$ 。 k が偶数ならこれは $\chi_{D^c} = \chi_D$ を与える。 k が奇数なら $\chi_{D^c} = \frac{2}{k+1}\mathbf{1} - \chi_D$ となり、その成分は $\{\frac{2}{k+1}, \frac{2}{k+1} - 1\}$ に属する。 これらが 0 または 1 になるのは $k = 1$ のときのみ。 $\square$

奇数の場合はもちろん系 8 がすでに含んでいる。 要点は、この議論が整除条件とは独立であることである。

次に交わらない系について考える。 $D(k)$ で互いに素なタイトな系の最大個数を表す。 large set の存在は $D(k) = k + 1$ に他ならない。

定理 15. D_1, D_2 を互いに素なタイトな系とし $n_i = \#\{(S, T) \in D_1 \times D_2 : |S \cap T| = i\}$ と置く。 このとき $0 \leq j \leq k$ に対し

$$n_{k-j} = \frac{C_k}{k+1} \binom{k}{j} \left(\binom{k}{j} - (-1)^j \right)$$

であり、しかも同じ分布がどのブロックから見ても成り立つ。 すなわち各 $S \in D_1$ に対し

$$L_j := \#\{T \in D_2 : |S \cap T| = k - j\} = \frac{1}{k+1} \binom{k}{j} \left(\binom{k}{j} - (-1)^j \right)$$

が S に依らず成り立つ。 とくに各系は他方に関する完全正則符号であり、 $L_0 = 0$ 、 $L_1 = k$ 、 k が偶数ならさらに $L_k = 0$ である。

証明. (6) より $\chi_i = \frac{1}{k+1}\mathbf{1} + h_i$ ($h_i \in V_k$) と書ける。 $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$ かつ $\langle \mathbf{1}, h_i \rangle = 0$ なので $\langle h_1, h_2 \rangle = -\frac{1}{(k+1)^2} \binom{2k}{k} = -\frac{C_k}{k+1}$ 。 A_j を $|S \cap T| = k - j$ に対応するスキーム行列とすると、その価数は ($n = 2k$ で) $\binom{k}{j}^2$ であり、 V_l 上の固有値は Eberlein 数 $E_j(l) = \sum_i (-1)^i \binom{l}{i} \binom{k-l}{j-i} \binom{n-k-l}{j-i}$ である。 $l = k$ 、 $n = 2k$ では $i = j$ の項のみが残り $E_j(k) = (-1)^j \binom{k}{j}$ 。 よって

$$n_{k-j} = \langle \chi_1, A_j \chi_2 \rangle = \frac{1}{(k+1)^2} \binom{2k}{k} \binom{k}{j}^2 + E_j(k) \langle h_1, h_2 \rangle$$

となり主張の値を得る。 局所版は $A_j \chi_2 = \frac{1}{k+1} \binom{k}{j} \mathbf{1} + (-1)^j \binom{k}{j} h_2$ をブロック $S \in D_1$ で評価すればよい ($S \notin D_2$ なので $h_2(S) = -\frac{1}{k+1}$)。 $\square$

定理 15 は実在する互いに素な対で検証した。 $k = 4$ では分布が $(n_0, \dots, n_4) = (0, 56, 84, 56, 0)$ 、 $L = (0, 4, 6, 4, 0)$ 、 $k = 6$ では $(0, 792, 3960, 7920, 3960, 792, 0)$ 、 $L = (0, 6, 30, 60, 30, 6, 0)$ であり、いずれも局所の個数が全ブロックで一定であることを確認した。

注意 16. L_j がすべての j で整数になるのは、すべての j で $\binom{k}{j} \equiv (-1)^j \pmod{k+1}$ が成り立つとき、かつそのときに限る。 そしてこれは $k+1$ が素数であることと同値である ($q = k+1$ が素数なら古典的に $\binom{q-1}{j} \equiv (-1)^j$)。 この同値性は $k \leq 200$ で確認した。 すなわち Ma-Tang の条件が、互いに素な二つのタイトな系の局所交差数の整数性としてここで再び現れる。

命題 17. $D(k) \neq k$ 。 より正確には、 $D_1, \dots, D_k$ が互いに素なタイトな系なら、それらの合併の補集合もまたタイトな系であり、したがって $D(k) = k + 1$ となる。

証明. $U = \bigsqcup_i D_i$ 、 $U' = \binom{[2k]}{k} \setminus U$ と置く。 どの $(k-1)$ -集合も各 D_i にちょうど一つの上位集合をもつので、 U にちょうど k 個、 U' にちょうど一つもつ。 よって U' はタイトな系である。 $\square$

k	系の個数	次数	辺数	三角形	$D(k)$
4	30	8	120	0	2
6	5,040	144	362,880	0	2

表 3: タイトなシュタイナー系の非交差グラフは $k = 4, 6$ で正則かつ三角形をもたない。よって互いに素な系は高々二つであり、large set には $k + 1$ 個が必要である。

最後に計算について。 $k = 4$ と $k = 6$ についてタイトな系をすべて列挙し、系を頂点とし互いに素な対を辺とする非交差グラフを作った。

つまり large set は僅差で破れるのではなく、大差で破れる。 $k = 6$ では七つの互いに素な系が必要なのに、最大は二つである。（対照的に $k = 2$ では [4] の三つの完全マッチングが互いに素で $D(2) = 3 = k + 1$ である。）ここから次を予想する。

予想 18. $k \geq 4$ のとき、三つのタイトなシュタイナー系 $S(k - 1, k, 2k)$ が互いに素になることはない。すなわち非交差グラフは三角形をもたず $D(k) \leq 2$ である。

命題 19. 予想 18 が正しければ、問題 1 はすべての $k > 2$ で否定的である。

証明. $k = 3$ ではタイトな系が存在しない。 $k \geq 4$ では large set に $k + 1 \geq 5 > 2$ 個の互いに素な系が必要である。 $\square$

予想 18 が魅力的なのは、第 5 節の方法と違い、単一のタイトな系が存在するかどうかを知る必要がない点である。 $k \geq 10$ ではそれがまさに未解決の $t \geq 6$ 問題だからである。

7 既知範囲 $3 \leq k \leq 8$

定理 2 は既知範囲も説明し、そこには二つの異なる現象があることを明らかにする。 $k \in \{3, 5, 7, 8\}$ では $k + 1$ が合成数なので、そもそもシュタイナー系が存在しない（定理 7）。一方 $k = 4$ と $k = 6$ では系は存在する。すなわち 14 ブロックの $S(3, 4, 8) = \text{SQS}(8)$ と、132 ブロックで自己同型群が M_{12} である Witt/Mathieu 系 $S(5, 6, 12)$ [9] である。障害は系ではなく large set の側にある。

後者二つは、彩色のエンコーディングを一切用いずに直接検証した。 $\text{SQS}(8)$ はすべて同型であり、 $S(5, 6, 12)$ もすべて同型なので、ラベル付き台集合上のそのような系の完全なリストは、任意の一つの S_{2k} -軌道である。そこで exact cover で一つ構成し、軌道を生成し、互いに素な $k + 1$ 個の組を Algorithm X で探索した（表 4）。個数 $5040 = 12! / |M_{12}|$ は理論値と一致する。

k	系	ブロック数	$[2k]$ 上の系の個数	large set	探索ノード数
4	$S(3, 4, 8)$	14	30	存在しない	19
6	$S(5, 6, 12)$	132	5,040	存在しない	18,001

表 4: $\text{LS}[5](3, 4, 8)$ と $\text{LS}[7](5, 6, 12)$ が存在しないことの全数検証。

相互検証として、問題 1 を $2 \leq k \leq 8$ について直接 SAT 問題として解き（表 5）、[1] に記録された範囲をゼロから再現した。Erdős と Rosenfeld 自身が結果を確信していなかった [1] ケース $k = 6$ には 61 秒を要した。

8 $S(9, 10, 20)$ に対する補強探索

定理 3 が得られる前、 $k = 10$ を Kramer–Mesner 法 [8] で計算的に攻めていた。すなわち群 $G \leq S_{20}$ を指定し、各 9-集合をちょうど一度被覆する 10-集合上の G -軌道の合併を探

k	頂点数	変数	節	結果	時間
2	6	18	75	充足可能	< 0.1 秒
3	20	80	564	充足不能	< 0.1 秒
4	70	350	3,855	充足不能	< 0.1 秒
5	252	1,512	24,198	充足不能	< 0.1 秒
6	924	6,468	142,303	充足不能	61.2 秒
7	3,432	27,456	796,232	充足不能	0.2 秒
8	12,870	115,830	4,285,719	充足不能	77.5 秒

表 5: 問題 1 の直接 SAT 求解。 $(k+1)!$ の色対称性を吸収するため クリークを一つ固定してある。

す。以下の各探索はその群について網羅的である。これらの結果は定理 3 ($S(9, 10, 20)$ はそもそも存在しない) に包含されるが、独立した裏付けになっており、コードはそのまま $k = 16$ に転用できる。

指定群 G	$ G $	軌道数 (9-集合 $\times$ 10-集合)	結果
$\text{PSL}(2, 19)$	3,420	52×74	なし
$\text{AGL}(1, 19)$	342	508×560	なし
$F_{19} \rtimes C_9$	171	$988 \times 1,092$	なし
$F_{19} \rtimes C_6$	114	$1,522 \times 1,676$	なし
$F_{19} \rtimes C_3$	57	$2,960 \times 3,268$	なし
C_{19}	19	$8,840 \times 9,724$	なし
C_{20}	20	$8,398 \times 9,252$	なし
D_{20}	40	$4,262 \times 4,752$	なし
$C_{20} \rtimes \langle 3 \rangle$	80	$2,134 \times 2,368$	なし

表 6: 自己同型群を指定した $S(9, 10, 20)$ の Kramer–Mesner 探索。

素数位数の自己同型についても巡回型を走査した。位数 p の自己同型は 20 点上で m 個の p -巡回と $20 - mp$ 個の固定点として作用する。 $p \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ については全巡回型を、 $p = 3$ については $m \leq 5$ の $3^m \cdot 1^{20-3m}$ を排除した。扱った最大の軌道系は $80,444 \times 87,516$ である。

$p = 11$ の場合は示唆的である。共役を除いて S_{20} の位数 11 の部分群は一意で、9 個の固定点をもつ 11-巡回が生成する。この作用で固定される 10-部分集合はないので、10-集合上の軌道の長さはすべて 11 である。ところが 9 個の固定点からなる 9-集合自身は固定され、その 11 個の 10-上位集合は単一の軌道をなすので、この 9-集合を 11 回被覆する。よって軌道系は即座に実行不能となる。

9 線形障害

$q = k+1$ を奇素数とし、彩色を $c: \binom{[2k]}{k} \rightarrow \mathbb{Z}_q$ と見る。 c が正当なら、各上位クリークについて q 個の値 $c(A \setminus \{a\})$ が $\mathbb{Z}_q$ を尽くすので、その和は $q(q-1)/2 \equiv 0$ である。星クリークについても同様。よって c は

$$K = \ker \partial^\uparrow \cap \ker \partial^\downarrow \subseteq \mathbb{F}_q^{\binom{[2k]}{k}}, \quad \partial^\uparrow c(A) = \sum_{S \in \binom{A}{k}} c(S), \quad \partial^\downarrow c(B) = \sum_{x \notin B} c(B \cup \{x\})$$

($|A| = k+1$, $|B| = k-1$) に属する。 $\mathbb{R}$ 上ではこの空間はジョンソン・スキームの最上位固有空間 V_k そのものであり、次元は $\binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} = C_k$ である ((6) 参照)。 $\mathbb{F}_q$ 上の厳密

な階数計算でも $k = 2, 4, 6$ でそれぞれ $\dim K = 2, 14, 132$ と同じ値が出て、両写像とも行フルランクであった。

予想 20. $k + 1$ が奇素数のとき $\dim_{\mathbb{F}_{k+1}} K = C_k$ 、すなわち法 $k + 1$ の階数は標数 0 の階数と一致する。

10 未解決問題

- (1) $k = 16$ と $S(4, 5, 21)$ 。系 4 より、問題 1 の未解決の最小ケースは $S(4, 5, 21)$ を必要とする。その存在は長年の未解決問題であり、可能な自己同型群はかなり絞り込まれている [5]。 $S(4, 5, 21)$ の非存在が証明されれば $k = 16$ は決着する。逆は成り立たない。連鎖条件は必要条件にすぎないからである。
- (2) **予想 18 の証明。** $k \geq 4$ で三つのタイトな系が互いに素になりえないことを示す。これは問題 1 を完全に解決しうる唯一の筋であり、 $t \geq 6$ の存在問題を完全に迂回する。手掛かりは二つある。定理 15 の局所構造と、ある系のブロック S と他の系 D_i に対して $a \mapsto \varphi_i(S \setminus \{a\})$ が全単射 $S \rightarrow [2k] \setminus S$ になること。後者から、互いに素な m 個の系は各ブロックにおいて $m - 1$ 個の互いに不一致な全単射、すなわち位数 k の部分ラテン方陣を与える。
- (3) $t = 4$ の項を超えて。 $k \in \{18, 30, 42\}$ では五重系 $S(4, 5, k + 5)$ が存在してしまうので、(5) からは何も出ない。単一の系ではなく large set の側から来る必要条件でこれらを扱えないか。 $k = 4$ と $k = 6$ でまさに破れているのが large set である。
- (4) $k > 6$ で $S(k - 1, k, 2k)$ は存在しうるか。そのような系はいずれも $t = k - 1 \geq 9$ をもつが、 $t \geq 6$ の非自明なシュタイナー系は一つも構成されたことがない。Keevash の存在定理 [7] は非構成的であり、 v が t と κ に対して十分大きいことを要するが、ここでは $v = 2k$ が下界 $v \geq (t + 1)(\kappa - t + 1)$ の許す限り最小である。 $k + 1$ が素数であるすべての $k > 6$ で否定的なら、問題 1 は完全に解決する。
- (5) **予想 20 の証明。** おそらく標数 $q = k + 1$ における S_{2k} の置換加群 $\mathbb{F}_q^{\binom{[2k]}{k}}$ の分解による。

謝辞

本稿の数学的展開および報告されたすべての計算は、Claude (Anthropic) との共同作業で行われた。Claude は定理 2 の言い換えを提案し、定理 7 と定理 3 の証明を与え、第 10 節のソフトウェアをすべて書き、探索を実行した。著者は問題を設定し、調査を指揮し、最終的な本文に責任を負う。Erdős 問題データベース [1, 2] を維持している Terence Tao 氏と寄与者各位に感謝する。

コードとデータ

以下の Python プログラム (python-sat、バックエンドは CaDiCaL) が上記のすべての計算結果を再現する。

ファイル	内容
erdos835.py	厳密および C_q -同変 SAT エンコーダ、独立検証器
steiner_check.py	クラスサイズと影の上界の比較、許容性の表
steiner_check2.py	許容性 $\Leftrightarrow k+1$ が素数、小さい k のシュタイナー系
largeset2.py	系の全列挙と Algorithm X による large set 探索
kramer_mesner.py	群を指定した $S(k-1, k, 2k)$ の探索
prime_autos.py	素数位数の自己同型の走査
ranks.py	$\mathbb{F}_q$ 上の $\partial^\uparrow, \partial^\downarrow$ の階数
verify_chain.py	導来設計の連鎖と現状の表
structure.py	補題 12–14、 V_j 上の Γ 、最大クリークによる $D(k)$
pairdist.py	定理 15 を実在の互いに素な対で検証
localdist.py	局所数 L_j 、注意 16 の素数同値
disjgraph.py	非交差グラフの次数と三角形数

ソルバの出力はすべて、 $(k+1)$ -部分集合を直接走査する独立な検証器で再確認している。Kramer–Mesner のコードは $\text{PSL}(2, 11)$ から Mathieu 系 $S(5, 6, 12)$ を再発見することで、SAT エンコーディングは $2 \leq k \leq 8$ の既知の答えを再現することで、それぞれ妥当性を確認した。

参考文献

- [1] Erdős Problem 835, The Erdős Problems database. <https://www.erdosproblems.com/835>. 2026年9月13日閲覧。
- [2] T. Tao et al., Erdős problem database (repository). <https://github.com/teorth/erdosproblems>.
- [3] P. Erdős, Some of my favourite problems and results, in: The Mathematics of Paul Erdős I, Algorithms Combin. 13, Springer, 1997, pp. 47–67.
- [4] P. R. J. Östergård and O. Pottonen, There exists no Steiner system $S(4, 5, 17)$, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), 1570–1573.
- [5] E. Kolotoğlu, On the possible automorphism groups of a Steiner quintuple system of order 21, J. Combin. Des. **22** (2014), 219–236.
- [6] A. E. Brouwer, Johnson graphs. <https://aeb.win.tue.nl/graphs/Johnson.html>. 2026年9月13日閲覧。
- [7] P. Keevash, The existence of designs, arXiv:1401.3665.
- [8] E. S. Kramer and D. M. Mesner, t -designs on hypergraphs, Discrete Math. **15** (1976), 263–296.
- [9] E. Witt, Über Steinersche Systeme, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938), 265–275.
- [10] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), Handbook of Combinatorial Designs, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, 2007.