



11 色で塗り分けられるか

エルデシュの未解決問題 835 に挑んだ記録

ピカいぬ 2026 年 9 月 13 日

そもそも、なんという問題か

名前・出どころ・いまの立ち位置

Erdős

835

エルデシュ問題データベース
の 1217 問中の一問

提唱者

ポール・エルデシュ と モシェ・ローゼンフェルド

分野

組合せ論（有限集合の塗り分け）

収録先

erdosproblems.com — テレンス・タオらが管理

状態

2026 年 1 月時点で「未解決」、解決の主張はゼロ

まず、何を塗るのか

k=2 の場合で、手順どおりにやってみる

① 材料は 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4 の 4 つの数字



② この中から 2 個ずつ 選ぶ。選び方は全部で 6 通り



③ この 6 通り全部に、3 色のどれかを塗る

「塗る」というのは、6 つの組それぞれに色を 1 つ割り当てるということ。どの色を何回使うかは自由。
ただし次のページのルールを守らなければならない。

ルール： どの 3 つを見ても 3 色そろう

守らなければいけないのは、これ一つだけ

たとえば 1 ・ 2 ・ 3 の 3 つを取り出してみる



この中の 2 個組は



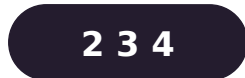
この 3 つが、3 色とも違う色でなければならない

なぜ「ちょうど 3 つ」になるのか — ここが問題の肝

3 つの数字から 2 個を選ぶのは「1 個だけ捨てる」と同じ。捨てる方が 3 通りだから、2 個組もちょうど 3 つ。

色も 3 色。つまり「3 色そろう」＝「3 つとも違う色」。数がぴったり噛み合う。

同じことを、3 つの数字の選び方すべてで要求する



この 4 通りすべてで「3 つとも違う色」になっていれば成功。1 つでも破れたら失敗。

一般のルールと、問い

k を好きな数にしても、同じことを要求する

- ① 材料 1 から $2k$ までの数字
- ② 塗る対象 その中から k 個を選ぶ組み合わせ、全部
- ③ 色の数 $k + 1$ 色
- ④ 守るルール どの $k+1$ 個の数字を取っても、その中の k 個組に全色が現れる

$k+1$ 個から k 個を選ぶ = 1 個だけ捨てる = ちょうど $k+1$ 通り。色も $k+1$ 色。だからここでも数はぴったり噛み合う。

聞いているのは「すべての k で成り立つか」ではなく「一つでもあるか」。見込まれる答えは“ $k = 2$ だけ”。

問い: $k > 2$ でこんな塗り方ができる k は、一つでもあるか?

例① $k=2$ — できる

ルールどおりに塗り分けた答え

さきほどの 6 通りを、次のように 3 色に振り分ける。

● 1 色め

1 2

3 4

● 2 色め

1 3

2 4

● 3 色め

1 4

2 3

ルール：どの 3 つの数字を取っても、その中の 2 個組（ちょうど 3 つある）が全部ちがう色になること。

$\{1,2,3\}$ の中の 2 個組は $\{1,2\} = 1$ 色め・ $\{1,3\} = 2$ 色め・ $\{2,3\} = 3$ 色め。3 色そろう。他の組でも同じ。→ 成功。

例② $k=3$ — つくれない

1 ~ 6 の 6 つの数字から、3 個ずつ選ぶ

3 個の選び方

$$C(6,3) = 20 \text{ 通り}$$

色の数

4 色

1 色あたり

$$20 \div 4 = 5 \text{ 個}$$

すると各色のグループは「6 点のどのペアも、ちょうど 1 つの 3 個組に入る」形でなければならない。

ところが、点をひとつ決めると……

その点は残り 5 点それぞれとペアを作る。ところが、その点を通る 3 個組は一度に 2 つのペアを使ってしまう。

つまりその点は $5 \div 2 = 2.5$ 個の 3 個組に入ることになる —— 整数にならない。

グループが 1 つも作れない。色を塗る以前の話 → $k=3$ は失敗

例③ $k=4$ — つくれるのに揃わない

1 ~ 8 の 8 つの数字から、4 個ずつ選ぶ。今度はグループが作れる

4 個の選び方は $C(8,4)=70$ 通り、色は 5 色、1 色あたり $70 \div 5 = 14$ 個。この 14 個組は実際に作れる。

1 つめ (14 個)

1234 1256 3456 1357 2457 2367 1467 2358 1458 1368 2468 1278 3478 5678

2 つめ (14 個)

1235 1346 2456 2347 1457 1267 3567 1248 3458 2368 1568 1378 2578 4678

この 2 つは 4 個組を 1 つも共有しない (互いに素)。合わせて 70 通りのうち 28 通りを使う。
ところが、**14 個組は全部で 30 通りあり、その 30 通りを総当たりしても、この 2 つ両方と素なものは 1 つもない。**

互いに素なグループは最大 2 つ。必要なのは 5 つ → $k=4$ は失敗

失敗の理由は 3 種類あった

例②で見たのが A、例③で見たのが C

A

そもそもグループが作れない

1 色ぶんのグループを作ろうとすると、割り算が整数にならない。例② がこれ。

$k+1$ が素数でない k
すべて

B

作れそうに見えて、やはり作れない

設計理論で「存在しない」と証明済みのものに行き着く。今回ここを突いた。

$k = 10, 12$

C

作れるのに、必要な数だけ揃わない

1 つ 2 つは作れても、 $k+1$ 個を互いに重ならないように揃えられない。例③ がこれ。

$k = 4, 6$ 、そしておそ
らく残り全部

従来わかっていたこと

60 年かけて、ここまで

$k = 2$

できる

例① のとおり

$k = 3 \sim 8$

できない

計算機で風潰しに確認済み（例②③がその中身）

$k+1$ が素数でない

できない

Ma と Tang の定理。理由 A がまとめて効く

$k = 10$

?

ここで止まっていた＝未解決の最小ケース

$k = 10$ の場合：20 個から 10 個を選ぶ組み合わせは 184,756 通り。これを 11 色で塗れるか——ここが 60 年動かなかった。



今回やったこと

4つの発見と、1つの予想

発見① 正体は設計理論の問題だった

例②③ に出てきた「グループ」には名前がある

$k+1$ 色で塗り分けられる

同値

シュタイナー系を $k+1$ 個
きれいに並べられる

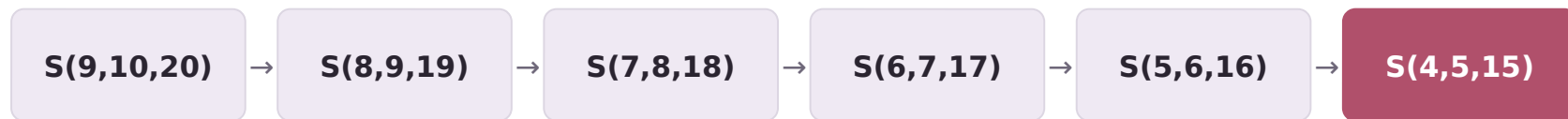
シュタイナー系とは

「もれなく・だぶりなく」を極限まで突き詰めた組の並べ方。例②で作れなかったもの、例③で14個ずつ作れたものが、まさにこれ。全部を $k+1$ 個のシュタイナー系に分割することを large set（大集合）という。

なぜ効くのか：翻訳した先には100年以上研究されてきた分野の道具が丸ごと揃っている。塗り分けのままでは手も足も出ないが、向こう側なら既知の定理が山ほど使える。

発見② $k=10$ と $k=12$ が落ちた

理由 B — 「小さくする操作」を繰り返すと存在しないものに行き着く



↑ これは存在しないことが
証明済み

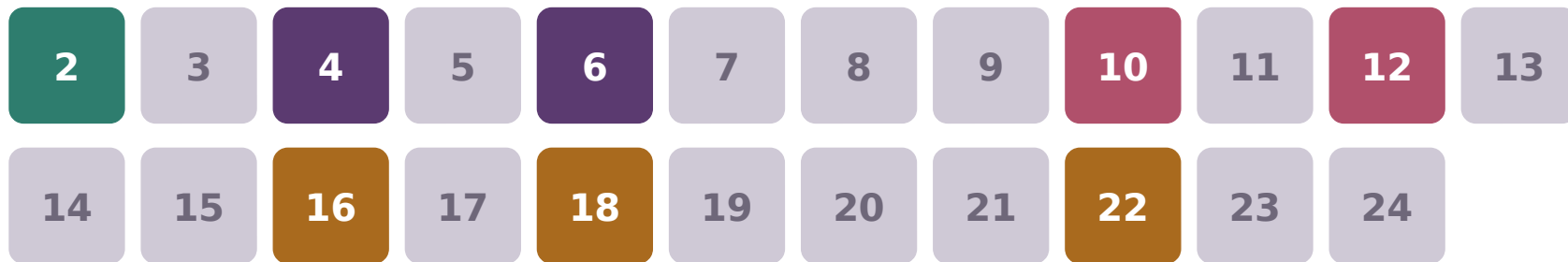
だから一番左も存在しない → $k = 10$ は「できない」で決着。

同じ論法を $k = 12$ に使うと $S(4,5,17)$ に行き着く。これも存在しないことが 2008 年に証明されている (Östergård-Pottonen)。よって $k = 12$ も決着。

未解決の最小ケースが $k = 10$ から $k = 16$ へ移動

いまの地図

k ごとの決着状況



● できる

● 理由 A で除外

● 理由 C で除外

● 今回 決着 (理由 B)

● まだ未解決

残る未解決は $k = 16, 18, 22, \dots$ 。最小の $k = 16$ は「 $S(4,5,21)$ が存在するか」という、1970年代から開いたままの設計理論の難問に直結している。

発見③ 中身の構造が見えた

既知の事実の組み合わせではなく、自分で証明した定理

1 おまけの性質がタダで付く

「もれなく・だぶりなく」を片側で守ると、反対側も自動的に守られる。要求していない性質が勝手に成立する。

2 k が偶数なら鏡写し

選んだ組と、選ばなかった残り。その両方が同じ並べ方に入る（自己補的）。

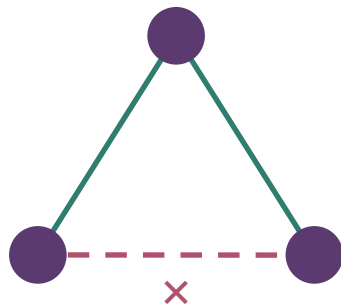
3 2 つ並べたときの重なり方は一通り

互いに素な 2 つの系がどう重なるかは k だけで完全に決まり、しかもどのブロックから見ても同じ。

おまけ：これらの数が整数になる条件を調べると、また「 $k+1$ が素数」が出てくる。別の道から同じ条件に戻ってきた。

発見④ 三角形が一つもなかった

例③で見た「2つが限界」は、どうやら全部で起きている



3つ目は必ず作れない

すべてのグループを列挙して、互いに素な組を総当たりで探した結果:

k = 4	30 通り	三角形 0	最大 2 つ
k = 6	5,040 通り	三角形 0	最大 2 つ

k = 6 では 7 つ必要なのに 2 つが限界。僅差ではなく、大差で不可能だった。

予想: $k \geq 4$ では、互いに素なグループは 2 つまでしか取れない

これが証明できれば、エルデシュ問題 835 はすべての k で完全に解決する。しかも「1 つでも作れるか」という別の難問を迂回できる。

従来 vs 今回

どこまでが既知で、どこからが今回か

	従来わかってしたこと	今回（AI との共同作業）
k = 2	できる（古典的）	—
k = 3 ~ 8	できない（計算機）	ゼロから再現、理由を構造で説明
k+1 が素数でない	できない（Ma-Tang）	数え上げだけの初等的な別証明
k = 10	未解決	できない（決着）
k = 12	未解決	できない（決着）
未解決の最小	k = 10	k = 16
系の構造	—	定理を 4 つ証明+予想を提出

正直な線引き：k=10・12 の決着は、今回見つけた「言い換え」と、既に発表されていた非存在結果を繋いだもの。構造の 4 定理と予想は自前。計算・証明・執筆はすべて Claude との共同作業。

今回、何を解決したか

解決

$k = 10$ と $k = 12$ を否定的に解決。未解決の最小ケースが $k = 16$ へ移った。

言い換え

塗り分け問題 $\Leftrightarrow$ シュタイナー系の large set。設計理論の道具が使えるようになった。

別証明

Ma-Tang の定理に、数え上げだけの初等的な証明を与えた。

構造定理

タイトなシュタイナー系の性質を 4 つ証明。自動的な二重性、自己補性、交差分布の決定。

予想

互いに素なグループは 2 つまで。正しければ問題は完全解決。証明は未完。

論文・コードは公開。Erdős 問題データベースへの報告と arXiv 投稿が次の一手。